

Rezumatul activității și a rezultatelor obținute în proiect în anul 2025

Cifra proiectului 25.80012.5007.76SE

Denumirea Proiectului Investigații calitative și algebrice ale modelelor diferențiale

În cadrul proiectului au fost studiate unele modele dinamice generate de sisteme diferențiale polinomiale bidimensionale (cubice, cuartice și de gradul șase) și ternare, care au puncte de echilibru rezonante și soluții algebrice. Au fost analizate și sistematizate metodele algebrice și calitative pentru cercetarea modelelor diferențiale: metoda de integrabilitate Darboux, metoda reversibilității raționale, metoda consecutivităților centrice, metoda algebrelor Lie, metoda studiului stabilității mișcării neperturbate și metoda blow-up.

Au fost determinate clasele de sistemele diferențiale cubice cu punct de echilibru de tip centru-focar, care au o dreaptă invariantă și o cubică invariantă fără puncte comune de intersecție. S-a demonstrat că punctul de echilibru de tip centru-focar este centru dacă și numai dacă primele cinci mărimi Lyapunov se anulează. Aplicând metoda de integrabilitate Darboux au fost obținute patru seturi de condiții necesare și suficiente încât punctul de echilibru să fie centru.

Au fost identificate clasele de sisteme diferențiale cuartice, cu punct de echilibru de tip centru-focar și infinitul nedegenerat, care admit o dreaptă invariantă reală și dreapta la infinit de multiplicitatea doi, trei, patru, cinci și șase. S-a arătat că multiplicitatea maximală a dreptei de la infinit este egală cu șase. S-a demonstrat că punctul de echilibru este centru, în sistemele diferențiale cuartice cu o dreaptă invariantă afină și dreapta de la infinit de multiplicitate maximală șase, dacă și numai dacă primele două mărimi Lyapunov se anulează. S-a demonstrat că orice sistem diferențial cuartic cu punct de echilibru de tip centru, care are o dreaptă invariantă afină și dreapta de la infinit de multiplicitate maximală sau este Darboux integrabil sau este un sistem Hamiltonian.

Au fost studiate sistemele diferențiale polinomiale de gradul șase pentru care se obține o clasificare luând la bază multiplicitatea dreptei de la infinit. Au fost determinate subclasele de sisteme de gradul șase ce admit o dreaptă invariantă la infinit de multiplicitate maximală.

Au fost cercetate unele clase de sisteme diferențiale ternare critice de tip Lyapunov-Darboux $s^3(1,6)$ care au trei operatori fără reprezentare și formează o algebra Lie L_3 comutativă. În baza ecuațiilor de structură, s-a demonstrat că sistemul $s^3(1,6)$ admite o algebră Lie L_9 reductivă. A fost identificat sistemul diferențial ternar ce descrie dinamica răspândirii tuberculozei, studiat cu ajutorul algebrei Lie. Au fost determinați doi operatori Lie de reprezentare, în baza cărora s-a construit ecuația de structură și s-a demonstrat că algebra Lie L_2 admisă de sistem este rezolubilă.

Rezultatele obținute au fost comunicate la patru conferințe științifice internaționale organizate în România, Ucraina, Bulgaria și Republica Moldova. Ele sunt importante în studiul modelelor diferențiale ce descriu procese naturale și sociale (modelul dinamicii răspândirii tuberculozei, modelul cubic de competiție, modelul cubic pradă-răpitor); la determinarea stabilității sistemelor dinamice; la obținerea soluțiilor periodice de tip ciclu limită; la cercetarea integrabilității modelelor diferențiale care au soluții algebrice; la elaborarea cursurilor opționale și a temelor tezelor de master.

Conducătorul de proiect Dumitru COZMA

Data: 03.12.2025



Summary of the activities and results achieved in the project in 2025

Project Code 25.80012.5007.76SE

Project Title Qualitative and Algebraic Investigations of Differential Models

Within the project, several dynamic models generated by two-dimensional polynomial differential systems (cubic, quartic, and of degree six) and ternary differential systems, which have resonant equilibrium points and algebraic solutions, were studied. Algebraic and qualitative methods for investigating differential models were analyzed and systematized: the Darboux integrability method, the method of rational reversibility, the method of center sequences, the method of Lie algebras, the method for studying the stability of unperturbed motion and the blow-up method.

Classes of cubic differential systems with a center-focus type equilibrium point having an invariant straight line and an invariant cubic curve without common intersection points were determined. It was proven that the center-focus type equilibrium point is a center if and only if the first five Lyapunov quantities vanish. By applying the Darboux integrability method, four sets of necessary and sufficient conditions for an equilibrium to be a center were obtained.

Classes of quartic differential systems with a center-focus equilibrium point and a nondegenerate infinity, admitting a real invariant straight line and the line at infinity with multiplicity two, three, four, five, and six, were identified. It was shown that the maximal multiplicity of the line at infinity is six. It was proven that a center-focus equilibrium point is a center in quartic differential systems with an affine invariant straight line and the line at infinity of maximal multiplicity six if and only if the first two Lyapunov quantities vanish. It was also proven that any quartic differential system with a center-type equilibrium point admitting an affine invariant straight line and the line at infinity of maximal multiplicity is either Darboux integrable or is the Hamiltonian system.

Sixth-degree polynomial differential systems were studied, for which a classification was obtained based on the multiplicity of the line at infinity. Subclasses of sixth-degree systems that admit an invariant line at infinity of maximal multiplicity were determined.

Classes of critical ternary differential systems of Lyapunov-Darboux type $s^3(1,6)$ with three operators without representation, forming a commutative Lie algebra L_3 , were investigated. Based on the structure equations, it was shown that the Lie algebra L_9 admitted by the system $s^3(1,6)$ is reductive. The ternary differential system describing the dynamics of tuberculosis transmission was identified and studied by using Lie algebras. Two representation Lie operators were determined, on the basis of which it was proven that the Lie algebra L_2 admitted by the system is solvable.

The obtained results were presented at four international scientific conferences organized in Romania, Ukraine, Bulgaria, and the Republic of Moldova. They are important for the study of: differential models describing natural and social processes (the model of tuberculosis spread dynamics, the cubic competition model, the cubic predator-prey model); stability of dynamical systems; bifurcations of periodic solutions; integrability of differential models with algebraic solutions; the development of optional courses and master's thesis topics.

Project Leader: Dumitru COZMA

Date: 03.12.2025

