

Rezumatul activității și a rezultatelor obținute în proiect în anul 2025

Cifra proiectului **25.80012.5007.83SE**

Denumirea Proiectului „**Studiul sistemelor diferențiale polinomiale pătratice cu elipse invariante: clasificare topologică și integrabilitatea Liouville**”

În etapa anului 2025 a proiectului, atenția principală a fost acordată familiei de sisteme diferențiale polinomiale pătratice care posedă cel puțin o elipsă invariantă, notată prin **SPE**. Pentru a simplifica analiză, numărul parametrilor a fost redus utilizând grupul transformărilor afine. S-a demonstrat că orice sistem din familia SPE poate fi adus, printr-o transformare afină și o rescalare a timpului, la una dintre cele trei forme canonice, care constituie un set notat cu **FC**. Aceste forme vor servi drept bază pentru investigațiile ulterioare.

Se știe că, pentru a determina portretele de fază topologic distincte ale unui sistem, este necesară informație despre singularitățile sale (finite și la infinit). Întreaga familie de sisteme pătratice, care depinde de 12 parametri independenți, admite **207 configurații topologice globale distincte ale singularităților**. Prin urmare, unul dintre obiectivele principale a fost investigarea configurațiilor topologice globale ale singularităților pentru sistemele care aparțin familiei SPE. Ca rezultat, s-a arătat că sistemele din setul FC admit **31 astfel de configurații**.

Un rol important în construcția portretelor de fază ale sistemelor din familia SPE îl au configurațiile de curbe invariante admise de aceste sisteme. Aceste configurații servesc drept „schelet” al portretelor de fază. Sistemele din SPE admit cel puțin o curbă invariantă și, eventual, drepte invariante. Conform teoriei integrabilității în sensul lui Darboux, numărul curbelor algebrice invariante este esențial în construcția integralelor prime. Acest fapt a motivat definirea unei subfamilii de sisteme din SPE, care admit simultan o elipsă invariantă și o parabolă invariantă, notată cu **SPEP**.

Au fost investigate configurațiile posibile de conice invariante (elipsă și parabolă) și de drepte invariante, iar rezultatul principal a fost că orice sistem din subfamilia SPEP poate admite una dintre **zece configurații posibile**. Pentru realizarea fiecăreia dintre aceste zece configurații au fost construite condiții necesare și suficiente, exprimate în termeni de polinoame afin-invariante.

Pe baza rezultatelor obținute în prima etapă a proiectului, a fost finalizat și publicat un preprint la Centrul Științific al Universității Autonome din Barcelona, Spania. Mai mult, aceste rezultate au fost prezentate în cadrul seminarului „Sisteme Dinamice” al Departamentului de Matematică al Universității Autonome din Barcelona. Rezultatele au fost, de asemenea, prezentate la conferința internațională „The 32nd Conference on Applied and Industrial Mathematics”, 18–21 septembrie 2025, București, România.

During the 2025 stage of the project, the main attention was devoted to the family of quadratic polynomial differential systems possessing at least one invariant ellipse, denoted by **SPE**. In order to simplify the analysis, the number of parameters was reduced using the group of affine transformations. It was proved that any system from the SPE family can be brought, by means of an affine transformation and a time rescaling, to one of three canonical forms, which constitute a set denoted by **FC**. These forms will serve as a basis for further investigations.

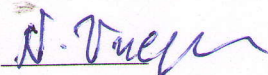
It is known that, in order to determine the topologically distinct phase portraits of a system, information about its singularities (finite and infinite) is required. The whole family of quadratic systems depending on 12 independent parameters admits 207 distinct global topological configurations of singularities. Therefore, one of the main objectives was to investigate the global topological configurations of singularities for systems belonging to the SPE family. As a result, it was shown that systems in the set **FC** admit 31 such configurations.

An important role in the construction of phase portraits of systems from the SPE family is played by the configurations of invariant curves admitted by these systems. These configurations serve as a skeleton of the phase portraits. Systems in SPE admit at least one invariant curve and possibly invariant straight lines. According to Darboux's theory of integrability, the number of algebraic invariant curves is essential in the construction of first integrals. This motivated the definition of a subfamily of systems in SPE, admitting simultaneously an invariant ellipse and an invariant parabola, denoted by **SPEP**.

The possible configurations of invariant conics (ellipse and parabola) and invariant straight lines were investigated, and it was proved that any system from the SPEP subfamily can admit one of ten possible configurations. Necessary and sufficient conditions, in terms of affine-invariant polynomials, were constructed for the realization of each of these ten configurations.

Based on the results obtained during the first stage of the project, a preprint was completed and published at the Scientific Center of the Autonomous University of Barcelona, Spain. Moreover, these results were presented at the "Dynamical Systems" seminar of the Department of Mathematics of the Autonomous University of Barcelona. The results were also presented at the international conference "The 32nd Conference on Applied and Industrial Mathematics", September 18–21, 2025, Bucharest, Romania.

Conducătorul de proiect: **Vulpe Nicolae**



Data: _____

LȘ